



## ÔN LUYỆN THEO CHƯƠNG

## NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Toán · Lớp 12

138 câu · 10 dạng bài · kythithpt.com

## KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM VÀ HỌ NGUYÊN HÀM

**Câu 1.** Tìm  $a$  để  $ax^4$  là một nguyên hàm của  $5x^3$ .

- A.  $\frac{5}{3}$                       B. 20                      C. 5                      D.  $\frac{5}{4}$

**Câu 2.** Hàm  $F$  thỏa  $F'(x) = mx + 2$  trên  $\mathbb{R}$ , với  $m$  là hằng số chưa biết. Biết  $F(0) = 4$  và  $F(2) = 32$ . Giá trị  $F(3)$  bằng

- A. 60                      B. 118                      C. 68                      D. 64

**Câu 3.** Cho  $F'(x) = 2x + 2$  và  $F(0) = 7$ . Giá trị  $F(2)$  bằng

- A. 8                      B. 15                      C. 6                      D. 1

**Câu 4.** Cho hàm số  $F$  thỏa  $F'(x) = 5x^2 + 3$  và  $F(0) = 3$ .

- a)  $F(3) - F(0) = 54$ .  
b)  $F'(3) = 48$ .  
c) Nếu  $F' = 0$  trên một khoảng thì  $F$  là hằng số trên khoảng ấy.  
d) Nguyên hàm của một đa thức bậc  $n$  là đa thức bậc  $n$ .

**Câu 5.** Nhận biết nguyên hàm và hằng số tích phân. Xét các nhận định về định nghĩa và quy tắc đã học.

- a) Hằng số C trong họ nguyên hàm bắt buộc bằng 0.  
b) Tích phân bất định luôn là một số cụ thể.  
c) Định nghĩa nguyên hàm yêu cầu  $F(x) = f'(x)$ .  
d) Một nguyên hàm của hàm 1 trên  $\mathbb{R}$  là  $x$ .

**Câu 6.** Cho  $F'(x) = 5x^3$  và  $F(0) = 5$ . Tính  $F(4)$ .

**Câu 7.** Hàm  $F$  thỏa  $F'(x) = mx + 4$  trên  $\mathbb{R}$ , với  $m$  là hằng số chưa biết. Biết  $F(0) = 2$  và  $F(1) = 8$ . Tính  $F(2)$ .

**Câu 8.** Cho  $F'(x) = 3x + 3$  và  $F(0) = 4$ . Tính  $F(3)$ .

**Câu 9.** Hàm  $F$  thỏa  $F'(x) = mx + 2$  trên  $\mathbb{R}$ , với  $m$  là hằng số chưa biết. Biết  $F(0) = 1$  và  $F(3) = 88$ . Tính  $F(4)$ .

**Câu 10.** Trên khoảng  $I = (-1; 4)$ , xét  $F(x) = 2x^2 + 2x + 3$  và  $f(x) = 4x + 2$ . Nêu đúng điều kiện định nghĩa  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên khoảng này, rồi kiểm tra điều kiện với hai hàm đã cho.

**Câu 11.** Nhận biết nguyên hàm và hằng số tích phân. Trình bày hai nội dung sau.

### CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

**Câu 12.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , biết  $\int f(x) dx = -x^2 + 2x + C$  và  $\int g(x) dx = -2x^3 + 2x + C$ . Khi đó  $\int (4f(x) - 3g(x)) dx$  bằng:

A.  $6x^3 - 4x^2 + 2x + C$

B.  $-8x^3 + 3x^2 + 2x + C$

C.  $-6x^3 - 4x^2 + 14x + C$

D.  $-2x^3 - x^2 + 4x + C$

**Câu 13.** Trên khoảng  $(-3; 5)$ , hai hàm  $F, G$  đều là nguyên hàm của cùng hàm  $f$ . Biết  $F(-2) = -6$  và  $G(-2) = -1$ . Giá trị  $F(4) - G(4)$  bằng

A.  $-5$

B.  $-6$

C.  $5$

D.  $-7$

**Câu 14.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , biết  $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C$  và  $\int (3f(x) - 2g(x)) dx = 4x^3 + 3x^2 + 18x + C$ . Khi đó  $\int g(x) dx$  bằng:

A.  $2x^3 + 3x + C$

B.  $4x^3 + 6x + C$

C.  $4x^3 + 2x^2 + 14x + C$

D.  $-2x^3 - 3x + C$

**Câu 15.** Trên  $\mathbb{R}$ , xét  $f(x) = 14 \sin(4x)$  và hai hàm  $F_1(x) = 7 \sin^2(2x)$ ,  $F_2(x) = -7 \cos^2(2x)$ . Hằng số  $C$  trong  $F_1 = F_2 + C$  bằng bao nhiêu?

A.  $7$

B.  $-7$

C.  $0$

D.  $14$

**Câu 16.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int f(x) dx = F(x) + C$  và  $\int g(x) dx = G(x) + C$ , trong đó  $F(x) = -3x^2 + 3x$  và  $G(x) = 2x^3 - x$ .

a)  $\int 4f(x) dx = -3x^2 + 3x + C$ .

b)  $f(x) = -6x + 3$ .

c)  $\int (4f(x) + 2g(x)) dx = 4x^3 - 12x^2 + 10x + C$ .

d) Nếu  $H_1(x)$  và  $H_2(x)$  cùng là nguyên hàm của  $4f(x) + 2g(x)$  thì  $H_1(x) - H_2(x)$  là một hằng số.

**Câu 17.** Trên khoảng  $(-4; 1)$ , hai hàm  $F, G$  đều là nguyên hàm của cùng hàm  $f$ . Biết  $F(-3) = 1$  và  $G(-3) = -1$ . Tính  $F(-1) - G(-1)$ .

   

**Câu 18.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , biết  $\int f(x) dx = -3x^2 - 2x + C$  và  $\int g(x) dx = -2x^3 + 2x + C$ . Tính giá trị của biểu thức  $2f(1) + 3g(1)$  (trả lời kèm dấu).

   

**Câu 19.**  $F$  và  $G$  là hai nguyên hàm của cùng hàm liên tục  $f$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(1)=4$ ,  $G(4)=17$ , và  $G(2)-F(2)=5$ . Tích phân của  $f$  từ 1 đến 4 bằng bao nhiêu?

   

**Câu 20.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , biết  $\int f(x) dx = 3x^2 - 2x + C$  và  $\int g(x) dx = -2x^3 + x + C$ . Biết  $\int (3f(x) - 3g(x)) dx = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + C$ . Tính  $\alpha + \beta + \gamma$ .

.....

.....

.....

**Câu 21.** Trên khoảng  $(-2; 5)$ , hai hàm  $F, G$  đều là nguyên hàm của cùng hàm  $f$ . Biết  $F(-1) = -4$  và  $G(-1) = 8$ . Tính  $F(1) - G(1)$ .

.....

.....

.....

**Câu 22.** Trên  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , đặt  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $F(x) = \ln |x|$  và  $G(x) = \begin{cases} \ln |x| - 4, & x < 0, \\ \ln |x| - 1, & x > 0. \end{cases}$  Tính  $F'$  và  $G'$  trên  $D$ . Xét có một hằng số chung  $C$  để  $G = F + C$  trên toàn miền không; nêu hằng số của hiệu  $G - F$  trên mỗi khoảng.

.....

.....

.....

**Câu 23.**  $F$  và  $G$  là hai nguyên hàm của cùng hàm liên tục  $f$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(1)=5$ ,  $G(4)=13$ , và  $G(2)-F(2)=6$ . Tích phân của  $f$  từ 1 đến 4 bằng bao nhiêu? Trình bày lập luận và các bước tính.

.....

.....

.....

### BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

**Câu 24.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x^7$  là:

- A.  $\frac{1}{4}x^8 + C$       B.  $\frac{2x^8}{7} + C$       C.  $14x^6 + C$       D.  $2x^7 + C$

**Câu 25.** Biết  $\int f(x) dx = -3 \sin x + C$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $f(x) = 3 \cos x$       B.  $f(x) = -3 \cos x$       C.  $f(x) = -3 \sin x$       D.  $f(x) = 3 \sin x$

**Câu 26.** Nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{2}{x} + 3x^3$  thỏa mãn  $F(1) = 1$  là

A.  $F(x) = 2 \ln |x| + \frac{3}{4}x^4 + \frac{7}{4}$

B.  $F(x) = 2 \ln |x| + 3x^4 - 2$

C.  $F(x) = 2 \ln |x| + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}$

D.  $F(x) = 2 \ln |x| + \frac{3}{4}x^4 + 1$

**Câu 27.** Trên toàn trục số, cho hàm  $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 9}$ . Hàm nào sau đây là một nguyên hàm?

A.  $\frac{x^2}{x^2 + 9}$

B.  $\frac{1}{x^2 + 9}$

C.  $10 \ln(x^2 + 9)$

D.  $5 \ln(x^2 + 9)$

**Câu 28.** Cho  $F'(x) = 12x^3$ ,  $F(0) = -1$ . Giá trị  $F(3)$  bằng

A. 323

B. 242

C. 243

D. 80

**Câu 29.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{8x^3 + x + 4}{x^2}$  là

A.  $4x^2 + \ln |x| + \frac{4}{x} + C$

B.  $4x^2 + x + 4 \ln |x| + C$

C.  $4x^2 + \ln |x| - \frac{4}{x} + C$

D.  $8x^2 + \ln |x| - \frac{4}{x} + C$

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = 5x^2$ .

a)  $F(x) = \frac{5}{3}x^3$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ .

b)  $f'(x) = 10x$ .

c) Mọi nguyên hàm của  $f(x)$  chỉ khác nhau một hằng số.

d)  $f(x)$  là hàm số lẻ.

**Câu 31.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$ . Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(1) = -8$ .

a)  $\int f(x) dx = -\frac{2}{x} + 5x + C$ .

b)  $F(x) = -\frac{2}{x} + 5x - 8$ .

c)  $\int_1^3 f(x) dx \approx 17,33$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d)  $F(3) \approx 3,33$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 32.** Biết  $\int \left( -\frac{2}{x} - 3 \cos x \right) dx = a \ln |x| + b \sin x + C$  với  $a, b$  là các số thực. Tính  $ab$ .

   

**Câu 33.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = -5 + 3 \sin x$  thỏa mãn  $F(0) = 18$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  (làm tròn đến hàng phần mười).

   

**Câu 34.** Cho  $F'(x) = 8x^3$ ,  $F(0) = -4$ . Tính  $F(1)$  (trả lời kèm dấu).

**Câu 35.** Cho hàm số  $f(x) = 8x^8$ .

**Câu 36.** Trên toàn trục số, cho hàm  $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 8}$ . Tìm họ nguyên hàm trên toàn trục số và kiểm tra bằng đạo hàm, gồm điều kiện miền.

**Câu 37.** Cho hàm số  $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 3$ . Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(1) = 19$ .

**Câu 38.** Cho  $F'(x) = 4x$ ,  $F(0) = 2$ . Tính  $F(3)$ .

### ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN TRONG CHUYỂN ĐỘNG VÀ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

**Câu 39.** Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = 4t - 8$  (m/s), trong đó  $t$  tính bằng giây. Tính độ dịch chuyển của chất điểm trong 6 giây đầu tiên.

- A. 72 m                      B. 40 m                      C. 24 m                      D. 32 m

**Câu 40.** Giả sử lợi nhuận biên (triệu đồng) khi bán xe đạp điện của một doanh nghiệp được mô hình hoá bởi  $P'(x) = -0,01x + 10$ , trong đó  $P(x)$  là lợi nhuận (triệu đồng) khi bán được  $x$  chiếc xe đạp điện. Khi chưa bán được chiếc xe đạp điện nào, lợi nhuận bằng 0. Tính sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 400 chiếc xe đạp điện.

- A. 2550 triệu đồng              B. 3200 triệu đồng              C. 2250 triệu đồng              D. 2700 triệu đồng

**Câu 41.** Giả sử lợi nhuận biên (triệu đồng) khi bán sản phẩm của một doanh nghiệp được mô hình hoá bởi  $P'(x) = -0,04x + 12$ , trong đó  $P(x)$  là lợi nhuận (triệu đồng) khi bán được  $x$  sản phẩm. Khi chưa bán được sản phẩm nào, lợi nhuận bằng 0. Tính lợi nhuận khi bán được 90 sản phẩm.

- A. 1242 triệu đồng              B. 1080 triệu đồng              C. 918 triệu đồng              D. 1404 triệu đồng

**Câu 42.** Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = 4t - 4$  (m/s), trong đó  $t$  tính bằng giây. Tính quãng đường chất điểm đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc nó đổi chiều chuyển động.

- A. 4 m                      B. 18 m                      C. 20 m                      D. 2 m

**Câu 43.** Một hồ điều hoà ban đầu có  $300 \text{ m}^3$  nước. Trong một trận mưa, nước từ các cống dồn vào hồ với tốc độ  $v_1(t) = 4t + 40 \text{ (m}^3/\text{giờ)}$ ; cùng lúc đó, hồ xả nước qua trạm bơm với tốc độ  $v_2(t) = 9t \text{ (m}^3/\text{giờ)}$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giờ kể từ lúc bắt đầu.

- a) Tại thời điểm  $t = 12$ , trong hồ có  $420 \text{ m}^3$  nước.  
 b) Lượng nước trong hồ lớn nhất bằng  $620 \text{ m}^3$ , đạt tại thời điểm  $t = 8$ .  
 c) Nếu hồ chỉ chứa được tối đa  $410 \text{ m}^3$  thì nước không bao giờ tràn ra ngoài.  
 d) Sau 8 giờ kể từ lúc bắt đầu, lượng nước trong hồ trở lại bằng lượng ban đầu.

**Câu 44.** Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = 3t - 3 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  tính bằng giây.

- a) Chất điểm chuyển động thẳng đều.  
 b) Chất điểm đổi chiều chuyển động tại thời điểm  $t = 3$  giây.  
 c) Độ dịch chuyển của chất điểm trong 5 giây đầu bằng  $22,5 \text{ m}$ .  
 d) Quãng đường chất điểm đi được trong 5 giây đầu bằng  $25,5 \text{ m}$ .

**Câu 45.** Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = 3t - 3 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  tính bằng giây. Tính độ dịch chuyển (mét) của chất điểm trong 4 giây đầu tiên.

   

**Câu 46.** Giả sử lợi nhuận biên (triệu đồng) khi bán máy lọc nước của một doanh nghiệp được mô hình hoá bởi  $P'(x) = -0,01x + 8$ , trong đó  $P(x)$  là lợi nhuận (triệu đồng) khi bán được  $x$  chiếc máy lọc nước. Khi chưa bán được chiếc máy lọc nước nào, lợi nhuận bằng 0. Biết rằng khi doanh số tăng từ 240 lên  $m$  chiếc máy lọc nước ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) thì lợi nhuận tăng thêm hơn 919 triệu đồng. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $m$ .

   

**Câu 47.** Một bể chứa nước thô nhận nước từ tuyến bơm cấp. Trong ca làm việc  $0 \leq t \leq 16$  (giờ), cảm biến ghi lưu lượng vào  $q_v(t) \text{ (m}^3/\text{giờ)}$  bằng hai công thức:  $q_v(t) = 7t + 74$  khi  $0 \leq t \leq 5$ , và  $q_v(t) = 4t - 1$  khi  $10 \leq t \leq 16$ . Trong khoảng  $5 < t < 10$  cảm biến **mất dữ liệu**. Quy ước vận hành: lấy **nội suy tuyến tính** giữa hai số đọc tốt ở hai đầu khoảng trống, tức giữa  $q_v(5) = 109$  và  $q_v(10) = 39$ . Lịch xả có hai giai đoạn:  $q_x(t) = 69 \text{ m}^3/\text{giờ}$  khi  $0 \leq t \leq 11$ , và  $q_x(t) = 42 \text{ m}^3/\text{giờ}$  khi  $11 < t \leq 16$ .

| Khoảng     | $q_v(t)$           | $q_x(t)$ |
|------------|--------------------|----------|
| $[0; 5]$   | $7t + 74$          | 69       |
| $(5; 10)$  | nội suy tuyến tính | 69       |
| $[10; 11]$ | $4t - 1$           | 69       |
| $(11; 16]$ | $4t - 1$           | 42       |

Đầu ca bể chứa  $V_0 = 3100 \text{ m}^3$  mức chứa phải **không vượt** ngưỡng an toàn  $V_{\text{at}} = 3217 \text{ m}^3$  trong suốt ca. Chỉ được xả bớt **một lần duy nhất ngay trước**  $t = 0$ , và lượng xả phải là **bội** của  $50 \text{ m}^3$  sau đó bể chạy đúng lịch xả trên, không can thiệp thêm. Hỏi lượng xả nhỏ nhất (bội của 50) phải xả ngay trước  $t = 0$  là bao nhiêu  $\text{m}^3$ ?

**Câu 48.** Trong một bể nuôi cá cảnh vừa thay nước, số vi khuẩn trong mỗi mililit nước tăng với tốc độ  $f(t) = \frac{900}{(1 + 0,25t)^2}$  (con/ngày),  $t \geq 0$ , trong đó  $t$  là số ngày kể từ lúc bắt đầu theo dõi. Lúc bắt đầu theo dõi, mỗi mililit nước của bể có 400 con vi khuẩn. Gọi  $N(t)$  là số vi khuẩn trong mỗi mililit nước của bể sau  $t$  ngày. Tính số vi khuẩn sau 4 ngày.

   

**Câu 49.** Một trạm cấp nước theo dõi lưu lượng nước trong khoảng thời gian  $t \in [3; 11]$  (giờ). Đồng hồ tại chỗ chỉ lưu lượng theo công thức  $q_{\text{đo}}(t) = \frac{13}{5}t^2 - 13t + \frac{236}{5}$  ( $\text{m}^3/\text{giờ}$ ), nhưng đồng hồ bị lệch **tuyến tính**:  $q_{\text{đo}} = a q_{\text{thật}} + b$  với  $a > 0$  hai hằng số  $a, b$  chưa biết. Hai dữ kiện hiệu chuẩn: tại thời điểm  $t_0 = 9$  giờ, thiết bị chuẩn đo được lưu lượng thật là  $108 \text{ m}^3/\text{giờ}$  và tổng thể tích nước **thật** chảy qua trong cả khoảng  $[3; 11]$  là  $597,33 \text{ m}^3$  (do bể chuẩn cân đo). Hỏi thể tích nước **thật** chảy qua trong khoảng  $[5; 7]$  bằng bao nhiêu  $\text{m}^3$ ?

   

**Câu 50.** Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hằng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số  $Q'(t) = 4t^3 - 84t^2 + 392t$ , trong đó  $t$  tính bằng giờ kể từ lúc mở cửa ( $0 \leq t \leq 17$ ) và  $Q'(t)$  tính bằng người/giờ. Tại thời điểm  $t = 1$  đã có 279 người có mặt ở khu di tích. Gọi  $Q(t)$  là số người có mặt ở khu di tích tại thời điểm  $t$ .

.....

.....

.....

**Câu 51.** Một hồ điều hoà nhận nước từ một tuyến kênh dẫn. Trong ca làm việc  $0 \leq t \leq 13$  (giờ), cảm biến ghi lưu lượng vào  $q_v(t)$  ( $\text{m}^3/\text{giờ}$ ) bằng hai công thức:  $q_v(t) = 2t + 109$  khi  $0 \leq t \leq 4$ , và  $q_v(t) = 2t + 23$  khi  $7 \leq t \leq 13$ . Trong khoảng  $4 < t < 7$  cảm biến **mất dữ liệu**. Quy ước vận hành: lấy **nội suy tuyến tính** giữa hai số đọc tốt ở hai đầu khoảng trống, tức giữa  $q_v(4) = 117$  và  $q_v(7) = 37$ . Lịch xả có hai giai đoạn:  $q_x(t) = 61 \text{ m}^3/\text{giờ}$  khi  $0 \leq t \leq 8$ , và  $q_x(t) = 38 \text{ m}^3/\text{giờ}$  khi  $8 < t \leq 13$ .

| Khoảng    | $q_v(t)$           | $q_x(t)$ |
|-----------|--------------------|----------|
| $[0; 4]$  | $2t + 109$         | 61       |
| $(4; 7)$  | nội suy tuyến tính | 61       |
| $[7; 8]$  | $2t + 23$          | 61       |
| $(8; 13]$ | $2t + 23$          | 38       |

Đầu ca hồ chứa  $V_0 = 3900 \text{ m}^3$  mức chứa phải **không vượt** ngưỡng an toàn  $V_{\text{at}} = 4115 \text{ m}^3$  trong suốt ca. Chỉ được xả bớt **một lần duy nhất ngay trước**  $t = 0$ , và lượng xả phải là **bội** của  $50 \text{ m}^3$  sau đó hồ chạy đúng lịch xả trên, không can thiệp thêm.

.....

.....

.....

**Câu 52.** Một trạm bơm dầu theo dõi lưu lượng dầu trong khoảng thời gian  $t \in [1; 5]$  (giờ). Đồng hồ tại chỗ chỉ lưu lượng theo công thức  $q_{\text{đo}}(t) = -\frac{33}{5}t^2 + \frac{33}{5}t + \frac{913}{5}$  ( $\text{m}^3/\text{giờ}$ ), nhưng đồng hồ bị lệch **tuyến tính**:  $q_{\text{đo}} = a q_{\text{thật}} + b$  với  $a > 0$  hai hằng số  $a, b$  chưa biết. Hai dữ kiện hiệu chuẩn: tại thời điểm  $t_0 = 1$  giờ, thiết bị chuẩn đo được lưu lượng thật là  $84 \text{ m}^3/\text{giờ}$  và tổng thể tích dầu **thật** chảy qua trong cả khoảng  $[1; 5]$  là  $248 \text{ m}^3$  (do bể chuẩn cân đo).

.....

.....

.....

**Câu 53.** Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = 3t - 3$  ( $\text{m/s}$ ), trong đó  $t$  tính bằng giây. Tính quãng đường (mét) chất điểm đi được trong 4 giây đầu tiên.

.....

.....

.....

**Câu 54.**  $F'(t)=f(t)$ ,  $F(0)=29$ . Đồ thị  $f$  là hai đoạn ngang:  $f(t)=5$  khi  $0 < t < 2$  và  $f(t)=-1$  khi  $2 < t < 3$ .  $F(3)$  bằng bao nhiêu? Trình bày lập luận và các bước tính.

.....

.....

.....

### ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

**Câu 55.** Mặt tiền của một nhà vòm trồng rau là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và mặt đất. Hai chân mặt tiền cách nhau 7,5 m, đỉnh vòm cao 3,5 m so với mặt đất. Phần mặt tiền ở độ cao từ 2,94 m trở lên được lợp tấm nhựa lấy sáng giá 90 nghìn đồng/ $\text{m}^2$ , phần bên dưới được lợp tôn giá 160 nghìn đồng/ $\text{m}^2$ . Diện tích mặt tiền của nhà vòm bằng bao nhiêu mét vuông?

- A. 26,3  $\text{m}^2$                       B. 8,8  $\text{m}^2$                       C. 13,1  $\text{m}^2$                       D. 17,5  $\text{m}^2$

**Câu 56.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol  $y = x^2 - 2x + 1$  và đường thẳng  $y = 9$ .

- A. 36                                  B. 108                                  C. 54                                  D. 18

**Câu 57.** Cổng một trường học có mặt trước là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và mặt đất. Hai chân cổng cách nhau 4 m, đỉnh cổng cao 6 m so với mặt đất. Ở chính giữa cổng có một lối đi hình chữ nhật rộng 2 m, cạnh dưới nằm trên mặt đất, hai đỉnh phía trên nằm trên parabol. Hai cánh cửa che kín lối đi có giá 1800 nghìn đồng/ $\text{m}^2$ , phần mặt cổng còn lại được ốp đá với giá 500 nghìn đồng/ $\text{m}^2$ . Diện tích phần ốp đá bằng bao nhiêu mét vuông?

- A. 12  $\text{m}^2$                               B. 16  $\text{m}^2$                               C. 3  $\text{m}^2$                               D. 7  $\text{m}^2$

**Câu 58.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2(x - 1)(7 - x)$  và trục hoành.

- A. 72                                      B. 144                                      C. 12                                      D. 216

**Câu 59.** Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2x(2 - x)$  và trục hoành.

- a) Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ 0 và  $-2$ .  
b) Trên khoảng  $(0; 2)$  đồ thị nằm phía dưới trục hoành.  
c) Khoảng cách giữa hai hoành độ giao điểm bằng 2.  
d) Diện tích ấy bằng  $\frac{8}{3}$ .

**Câu 60.** Mặt trước của một nhà kho là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và mặt đất. Hai chân tường mặt trước cách nhau 12 m, nóc nhà kho cao 10 m so với mặt đất. Ở chính giữa mặt trước có một cửa ra vào hình chữ nhật rộng 6 m, cạnh dưới nằm trên mặt đất, hai đỉnh phía trên nằm trên parabol. Cửa ra vào làm bằng thép với giá 1050 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, phần còn lại của mặt trước được lắp kính với giá 350 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Chọn hệ trục  $Oxy$  có gốc  $O$  là trung điểm của đoạn nối hai chân tường mặt trước, trục  $Ox$  nằm trên mặt đất, trục  $Oy$  đi qua nóc nhà kho, đơn vị trên mỗi trục là mét.

a) Diện tích mặt trước của nhà kho bằng 80 m<sup>2</sup>.

b) Cửa ra vào cao 2,5 m.

c) Diện tích phần lắp kính bằng 65 m<sup>2</sup>.

d) Diện tích cửa ra vào bằng 15 m<sup>2</sup>.

**Câu 61.** Đồ thị hàm số  $y = 2(x + 1)(5 - x)$  cắt trục hoành tại hai điểm. Tính hoành độ lớn hơn trong hai hoành độ ấy.

   

**Câu 62.** Hai đồ thị  $y = 2|x - 4| - 4$  và  $y = 5(x - 4)^2 - 4$  giới hạn các miền hữu hạn. Tính tổng diện tích, làm tròn đến hai chữ số thập phân.

   

**Câu 63.** Một mặt cắt lớp phủ có hai đường: biên trên lớp phủ là đồ thị của  $f_\lambda(x) = -2x^3 + (11 + 2\lambda)x^2 + (-5 - 12\lambda)x - 4$ , còn biên dưới lớp phủ là đồ thị của  $g(x) = -x^2 - 5x - 4$  ở đây  $\lambda$  là một **số nguyên chưa biết** thoả  $1 \leq \lambda \leq 5$ . Hai đường cắt nhau tại  $x = 0$  và  $x = 6$  với mọi  $\lambda$ , và trong khoảng giữa còn đúng một giao điểm nữa. Ngoài ra một phép đo cho  $\int_0^6 [f_\lambda(x) - g(x)]dx \approx 0$  (đã làm tròn đến hai chữ số thập phân); trong miền trên chỉ đúng một  $\lambda$  cho giá trị ấy. Tính tổng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên  $[0; 6]$ .

   

**Câu 64.** Mặt trước một cửa hàng có ô cửa kính gồm phần dưới là hình chữ nhật rộng 6 m, cao 2 m và phần trên là một vòm parabol nối hai đỉnh phía trên của hình chữ nhật; đỉnh vòm nằm trên trục đối xứng của ô cửa và cao hơn cạnh trên của hình chữ nhật 0,6 m. Kính ở phần hình chữ nhật có giá 550 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, kính màu ở phần vòm có giá 1650 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Diện tích phần vòm chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích ô cửa? (làm tròn đến hàng phần mười).

   

**Câu 65.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 3x(2 - x)$  và trục hoành.

   

**Câu 66.** Mặt trước của một nhà kho là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và mặt đất. Hai chân tường mặt trước cách nhau 13 m, nóc nhà kho cao 12 m so với mặt đất. Ở chính giữa mặt trước có một cửa ra vào hình chữ nhật rộng 6,5 m, cạnh dưới nằm trên mặt đất, hai đỉnh phía trên nằm trên parabol. Cửa ra vào làm bằng thép với giá 700 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, phần còn lại của mặt trước được lắp kính với giá 450 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Diện tích mặt trước của nhà kho bằng bao nhiêu mét vuông?

**Câu 67.** Bác Vinh làm một cánh cổng sắt gồm phần dưới là hình chữ nhật rộng 6 m, cao 2, 4 m và phần trên là một vòm parabol nổi hai đỉnh phía trên của hình chữ nhật; đỉnh vòm nằm trên trục đối xứng của cánh cổng và cao hơn cạnh trên của hình chữ nhật 1 m. Phần hình chữ nhật có giá 1300 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, phần vòm làm hoa văn có giá 1150 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Chọn hệ trục  $Oxy$  có gốc  $O$  là trung điểm của cạnh dưới của cánh cổng, trục  $Ox$  chứa cạnh ấy, trục  $Oy$  đi qua đỉnh vòm, đơn vị trên mỗi trục là mét.

.....

.....

.....

**Câu 68.** Hai đồ thị  $y = 6|x + 2| + 5$  và  $y = 3(x + 2)^2 + 5$  giới hạn các miền hữu hạn.

.....

.....

.....

**Câu 69.** Một biểu đồ hai đường công suất có hai đường: đường máy A là đồ thị của  $f_\lambda(x) = -x^3 + (7 + \lambda)x^2 + (-6 - 9\lambda)x + (3 + 14\lambda)$ , còn đường máy B là đồ thị của  $g(x) = -2x^2 + 8x + 3$  ở đây  $\lambda$  là một **số nguyên chưa biết** thỏa  $3 \leq \lambda \leq 6$ . Hai đường cắt nhau tại  $x = 2$  và  $x = 7$  với mọi  $\lambda$ , và trong khoảng giữa còn đúng một giao điểm nữa. Ngoài ra một phép đo cho  $\int_2^7 [f_\lambda(x) - g(x)]dx \approx -10,42$  (đã làm tròn đến hai chữ số thập phân); trong miền trên chỉ đúng một  $\lambda$  cho giá trị ấy.

.....

.....

.....

**Câu 70.** Cho parabol  $(P) : y = x^2 - 6x + 9$  và đường thẳng  $d : y = 16$ .

.....

.....

.....

**Câu 71.** Cho hàm số  $y = 4(x - 2)(8 - x)$ .

.....

.....

.....

#### TÍNH NGUYÊN HÀM TRONG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐƠN GIẢN BẰNG BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ VÀ CÔNG THỨC CƠ BẢN

**Câu 72.** Cho hàm số  $f(x) = -6(2x + 1)^2$ . Biết  $F(x) = -(2x + 1)^3 + C$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  và  $F(1) = -25$ . Giá trị của  $C$  bằng:

- A. 2                                      B. -52                                      C. 29                                      D. -25

**Câu 73.** Cho hàm số  $f(x) = -9(3x + 5)^2$  và  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(-1) = -13$ . Giá trị  $F(-2)$  bằng:

- A. -4                                      B. -12                                      C. 1                                      D. 6

**Câu 74.** Hàm  $F$  có đạo hàm  $F'(x) = 5|x + 5|$  tại mọi  $x \in \mathbb{R}$ , thỏa  $F(-7) = 6$ . Giá trị chính xác  $F(-1)$  bằng bao nhiêu?

- A. 56                                      B. -44                                      C. 46                                      D. 36

**Câu 75.** Cho hàm số  $f(x) = 9(3x - 4)^2$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(1) = 8$ .

a)  $\int f(x) dx = 3(3x - 4)^3 + C$ .

b)  $f(1) = 9$ .

c)  $F(2) = 16$ .

d) Giá trị  $\int_1^2 f(x) dx$  thay đổi khi chọn hằng số  $C$  khác.

**Câu 76.** Cho hàm số  $f(x) = -6(2x + 2)^2$ . Biết  $F(x) = -(2x + 2)^3 + C$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  và  $F(0) = -5$ . Tính  $C$ .

   

**Câu 77.** Cho hàm số  $f(x) = -6(2x - 1)^2$  và  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(-1) = 20$ . Tính  $F(1)$  (trả lời kèm dấu).

   

**Câu 78.** Cho hàm số  $f(x) = 12(3x - 5)^3$ . Biết  $F(x) = (3x - 5)^4 + C$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  và  $F(2) = -3$ . Tính  $C$ .

.....

.....

.....

**Câu 79.** Cho hàm số  $f(x) = 9x^2 + 8x$  và  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(1) = 12$ . Tính  $F(-2)$ .

.....

.....

.....

**Câu 80.** Hàm  $F$  có đạo hàm  $F'(x) = |x - 6|$  tại mọi  $x \in \mathbb{R}$ , thỏa  $F(1) = -4$ . Tìm  $F$  và tính  $F(11)$ . Kiểm tra đạo hàm tại  $x = 6$ , nơi biểu thức trị tuyệt đối đổi nhánh.

.....

.....

.....

### TÍNH TÍCH PHÂN TRONG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐƠN GIẢN

**Câu 81.** Cho  $f(x) = x^4$ . Tính  $\int_0^5 x^4 dx$ .

- A. 3125                                      B.  $\frac{3125}{4}$                                       C. 625                                      D. -625

**Câu 82.** Cho  $f(x) = x^6$ . Tính giá trị trung bình của  $f$  trên  $[0; 4]$ .

- A.  $\frac{16384}{7}$                                       B.  $\frac{4096}{7}$                                       C.  $-\frac{4096}{7}$                                       D.  $\frac{65536}{7}$

**Câu 83.** Cho  $f(x) = x^7$ . Tính  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ .

- A.  $\frac{7}{13}$                                       B.  $\frac{49}{13}$                                       C.  $\frac{1}{15}$                                       D.  $-\frac{49}{13}$

**Câu 84.** Cho  $f(x) = x^7$ .

a)  $f$  là hàm số lẻ.

b)  $\int_0^3 x \cdot x^7 dx = \frac{6561}{8}$

c)  $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{78121827}{13}$

d) Giá trị trung bình của  $f$  trên  $[0; 3]$  bằng  $\frac{2187}{8}$

**Câu 85.** Cho  $f(x) = x^2$ . Tính  $\int_0^6 x^2 dx$ .

   

**Câu 86.** Cho  $f(x) = x^6$ . Tính  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

   

**Câu 87.** Một trạm sạc pin công nghiệp có công suất sạc thay đổi theo thời gian  $t$  (giờ) như sau: từ lúc  $t = 0$ , công suất sạc **tăng đều** theo  $r(t) = 55 + 3t$  (kW); từ một thời điểm chuyển  $\tau$  trở đi, công suất sạc **giảm đều** với tốc độ giảm 4 kW mỗi giờ, và không có bước nhảy tại  $\tau$ . Quá trình kéo dài tới  $T = 22$  giờ. Thời điểm chuyển  $\tau$  là một số **nguyên** thỏa  $5 \leq \tau \leq 19$ , nhưng bản ghi đã mất. Hai đồng hồ tích lũy đặt độc lập, mỗi cái cộng dồn trên một cửa sổ thời gian riêng (hai cửa sổ **chồng lấn** nhau), và báo:

| Cửa sổ    | Tổng đã ghi |
|-----------|-------------|
| $[0; 21]$ | 1600 kWh    |
| $[8; 22]$ | 1000 kWh    |

Cả hai số đều **đã làm tròn** đến bội gần nhất của 200 kWh. Tìm thời điểm chuyển  $\tau$  (theo giờ).

   

**Câu 88.** Cho  $f(x) = x^7$ . Tính  $F(2)$ , biết  $F' = f$  và  $F(0) = 8$ .

   

**Câu 89.** Cho  $f(x) = x^6$ . Tính  $\int_0^4 x \cdot x^6 dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 90.** Cho  $f(x) = x^2$ . Tính  $\int_0^5 [x^2]^2 dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 91.** Một hệ tưới tự động có lưu lượng tưới thay đổi theo thời gian  $t$  (giờ) như sau: từ lúc  $t = 0$ , lưu lượng tưới **tăng đều** theo  $r(t) = 47 + 5t$  ( $\text{m}^3/\text{giờ}$ ); từ một thời điểm chuyển  $\tau$  trở đi, lưu lượng tưới **giảm đều** với tốc độ giảm  $3 \text{ m}^3/\text{giờ}$  mỗi giờ, và không có bước nhảy tại  $\tau$ . Quá trình kéo dài tới  $T = 19$  giờ. Thời điểm chuyển  $\tau$  là một số **nguyên** thoả  $3 \leq \tau \leq 17$ , nhưng bản ghi đã mất. Hai đồng hồ tích lũy đặt độc lập, mỗi cái cộng dồn trên một cửa sổ thời gian riêng (hai cửa sổ **chồng lấn** nhau), và báo:

| Cửa sổ     | Tổng đã ghi        |
|------------|--------------------|
| $[0; 18]$  | $1500 \text{ m}^3$ |
| $[10; 19]$ | $800 \text{ m}^3$  |

Cả hai số đều **đã làm tròn** đến bội gần nhất của  $100 \text{ m}^3$ . Lập biểu thức của hai tổng theo  $\tau$  (nhớ xét đủ các trường hợp vị trí của  $\tau$  so với hai mốc cửa sổ), rồi tìm  $\tau$  và kiểm lại cả hai số đã ghi.

**Câu 92.** Cho  $f(x) = x^7$ . Tính  $\int_0^1 x^7 dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

## KHÁI NIỆM VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

**Câu 93.** Giá trị  $\int_4^4 f(x) dx$  bằng

- A.  $f(4)$                       B. 0                      C. 4                      D. 1

**Câu 94.** Biết  $\int_2^5 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 g(x) dx = -5$ . Giá trị  $\int_2^5 [4f(x) + g(x)] dx$  bằng

- A. -3                      B. -12                      C. 13                      D. 3

**Câu 95.** Hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kì 7. Biết  $\int_0^7 f(x) dx = 5$ . Tính  $\int_{-4}^{24} f(x) dx$ .

- A. 140                      B. 5                      C. 15                      D. 20

**Câu 96.** Hàm  $f$  liên tục và dương nghiêm ngặt trên  $[0; 3]$ . Giá trị  $I = \int_0^3 \frac{f(x)}{f(x) + f(3-x)} dx$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{3}{2}$                       B. 6                      C. 3                      D. 1

**Câu 97.** Không cần tìm nguyên hàm của phân thức. Giá trị  $I = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + e^{(2-x)}} dx$  bằng bao nhiêu?

- A. 4                      B. 1                      C.  $\frac{2}{3}$                       D. 2

**Câu 98.** Cho  $\int_2^4 f(x) dx = 7$ ,  $\int_4^7 f(x) dx = 8$  và  $\int_2^4 g(x) dx = 7$ .

a)  $\int_4^4 f(x) dx = 0$ .

b)  $\int_4^2 f(x) dx = -7$ .

c) Nếu  $f$  là hàm lẻ thì tích phân trên đoạn đối xứng bằng không.

d) Tích phân của tích hai hàm bằng tích hai tích phân.

**Câu 99.** Một trạm quan trắc lưu lượng ghi số các tích phân của hàm  $f(x)$  (lưu lượng dòng chính) trên những đoạn có chung đầu mút, với các mốc  $x_0 = 1, x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 11, x_4 = 15$ . Một vài bản ghi được ghi theo **cận đảo**, một vài bản ghi khác chỉ ghi tích phân của một **tổ hợp**  $f(x)$  với  $g(x)$  (lưu lượng dòng nhánh) – khi đó tích phân của  $g(x)$  trên **đúng cặp cận ấy** được ghi kèm.

| Bản ghi | Nội dung                         | Số đã ghi | Dữ liệu kèm               |
|---------|----------------------------------|-----------|---------------------------|
| (1)     | $\int_1^5 (4f(x) + g(x)) dx$     | −10       | $\int_1^5 g(x) dx = 6$    |
| (2)     | $\int_1^{11} f(x) dx$            | 11        | —                         |
| (3)     | $\int_{15}^1 f(x) dx$            | −5        | —                         |
| (4)     | $\int_7^5 f(x) dx$               | −8        | —                         |
| (5)     | $\int_5^{11} (3f(x) - 2g(x)) dx$ | 28        | $\int_5^{11} g(x) dx = 7$ |
| (6)     | $\int_5^{15} f(x) dx$            | 9         | —                         |
| (7)     | $\int_7^{11} f(x) dx$            | 6         | —                         |

Biết **đúng một** bản ghi bị ghi sai số (mọi cận và mọi hệ số đều đúng), và các bản ghi còn lại đều chính xác. Hàm  $f(x)$  không được cho tường minh. Xét các khẳng định sau.

a) Bản ghi bị ghi sai là bản ghi (1).

b) Bản ghi bị ghi sai ấy đúng ra phải ghi số 12.

c)  $\int_7^{15} f(x) dx = 1$ .

d) Nếu biết thêm  $\int_1^{11} g(x) dx = 7$  thì  $\int_{11}^1 (4f(x) + g(x)) dx = -47$ .

**Câu 100.** Biết  $\int_0^5 f(x) dx = 7$  và  $\int_5^7 f(x) dx = -6$ . Tính  $\int_0^7 f(x) dx$ .

   

**Câu 101.** Biết  $\int_0^4 f(x) dx = -9$  và  $\int_0^4 g(x) dx = -3$ . Tính  $\int_0^4 [2f(x) + g(x)] dx$  (trả lời kèm dấu).

   

**Câu 102.** Hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kỳ 7. Biết  $\int_0^7 f(x) dx = -9$ . Tính  $\int_{-4}^{31} f(x) dx$  (trả lời kèm dấu).

   

**Câu 103.** Biết  $\int_1^5 f(x) dx = -5$  và  $\int_1^5 g(x) dx = -5$ . Tính  $\int_1^5 [5f(x) + g(x)] dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 104.** Hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kỳ 7. Biết  $\int_0^7 f(x) dx = -5$ . Tính  $\int_6^{62} f(x) dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 105.** Một trạm quan trắc lưu lượng ghi số các tích phân của hàm  $f(x)$  (lưu lượng dòng chính) trên những đoạn có chung đầu mút, với các mốc  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 8$ . Một vài bản ghi được ghi theo **cận đảo**, một vài bản ghi khác chỉ ghi tích phân của một **tổ hợp**  $f(x)$  với  $g(x)$  (lưu lượng dòng nhánh) – khi đó tích phân của  $g(x)$  trên **đúng cặp cận ấy** được ghi kèm.

| Bản ghi | Nội dung                      | Số đã ghi | Dữ liệu kèm             |
|---------|-------------------------------|-----------|-------------------------|
| (1)     | $\int_1^2 (2f(x) - 2g(x)) dx$ | 2         | $\int_1^2 g(x) dx = 5$  |
| (2)     | $\int_7^1 f(x) dx$            | -15       | —                       |
| (3)     | $\int_1^8 f(x) dx$            | 24        | —                       |
| (4)     | $\int_2^3 (2f(x) - g(x)) dx$  | 15        | $\int_2^3 g(x) dx = -9$ |
| (5)     | $\int_2^8 f(x) dx$            | 18        | —                       |
| (6)     | $\int_3^7 (3f(x) - 2g(x)) dx$ | 6         | $\int_3^7 g(x) dx = 6$  |
| (7)     | $\int_8^7 f(x) dx$            | -6        | —                       |

Biết **đúng một** bản ghi bị ghi sai số (mọi cận và mọi hệ số đều đúng), và các bản ghi còn lại đều chính xác. Hàm  $f(x)$  không được cho tường minh. Quy mọi bản ghi về tích phân của  $f(x)$  theo chiều tăng, chỉ ra bản ghi bị ghi sai và số đúng ra phải ghi, rồi tính  $\int_2^7 f(x) dx$ .

**Câu 106.** Biết  $\int_2^4 f(x) dx = -6$  và  $\int_4^6 f(x) dx = 6$ . Tính  $\int_2^6 f(x) dx$ .

**Câu 107.** Hàm  $f$  liên tục trên  $[0; 4]$ , biết  $\int_0^4 f(x) dx = 1$ . Tính  $I = \int_0^4 [f(x) + f(4 - x)] dx$  bằng đổi biến phản xạ. Giải thích vì sao các phép đổi biến và cộng tích phân hợp lệ.

**Câu 108.** Hàm  $f$  liên tục và dương nghiêm ngặt trên  $[0; 6]$ . Chứng minh  $I = \int_0^6 \frac{f(x)}{f(x) + f(6 - x)} dx$  không phụ thuộc cách chọn  $f$ . Tính  $I$  và áp dụng để tính  $\int_0^6 \frac{e^{3x}}{e^{3x} + e^{3(6-x)}} dx$  mà không tìm nguyên hàm.

### CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ

**Câu 109.** Tính  $\int_0^2 (3x^2 + 2x + 2) dx$ .

A. 12

B. 18

C. -16

D. 16

**Câu 110.** Hàm  $F$  là một nguyên hàm của hàm số liên tục  $f$  trên  $[-1; 4]$ . Biết  $F(-1) = 0$ ,  $F(1) = 2$ ,  $F(4) = -1$ . Giá trị  $2 \int_{-1}^1 f(x) dx - 3 \int_1^4 f(x) dx$  bằng

- A.  $-5$                       B.  $13$                       C.  $-13$                       D.  $4$

**Câu 111.** Tìm  $t$  biết  $\int_0^1 ((tx + 1)) dx = 4$ .

- A.  $4$                       B.  $6$                       C.  $3$                       D.  $8$

**Câu 112.** Đặt  $G(x) = \int_3^{4x^2+3} \sqrt{1+t^4} dt$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị chính xác  $G'(-3)$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-24\sqrt{2313442}$                       B.  $0$                       C.  $\sqrt{2313442}$                       D.  $24\sqrt{2313442}$

**Câu 113.** Tính  $\int_0^6 (|x - 3|) dx$ .

- A.  $3$                       B.  $0$                       C.  $9$                       D.  $18$

**Câu 114.** Cho hàm số  $f(x) = 6x^2 + 4x$ .

a)  $\int_0^0 (6x^2 + 4x) dx = 0$ .

b) Công thức Newton–Leibniz đòi hỏi hàm liên tục trên đoạn lấy tích phân.

c)  $\int_2^0 (6x^2 + 4x) dx = 24$ .

d) Tích phân của một hàm dương trên  $[0; 2]$  luôn dương.

**Câu 115.** Tính  $\int_0^3 (4x^2 + 2x + 5) dx$ .

   

**Câu 116.** Hàm  $F$  là một nguyên hàm của hàm số liên tục  $f$  trên  $[-2; 4]$ . Biết  $F(-2) = 1$ ,  $F(4) = 9$ . Tính  $\int_4^{-2} f(x) dx$  (trả lời kèm dấu).

   

**Câu 117.** Tính  $\int_0^{10} (|x - 5|) dx$ .

   

**Câu 118.** Tính  $\int_0^1 (4x^2 + 4x + 5) dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

.....

.....

.....

**Câu 119.** Hàm  $F$  là một nguyên hàm của hàm số liên tục  $f$  trên  $[-2; 6]$ . Biết  $F(-2) = 2$ ,  $F(6) = 10$ . Tính  $\int_6^{-2} f(x) dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 120.** Đặt  $G(x) = \int_6^{5x^2+6} \sqrt{1+t^4} dt$  trên  $\mathbb{R}$ . Tính chính xác  $G'(1)$  mà không tìm nguyên hàm tường minh. Nêu dấu đạo hàm và giải thích vai trò của cận trên phụ thuộc biến.

.....

.....

.....

**Câu 121.** Tính  $\int_0^6 (|x - 3|) dx$ .

### ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ KHỐI TRÒN XOAY

**Câu 122.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ . Tính  $\int_0^3 [f(x)]^2 dx$ .

- A.  $\frac{35}{2}$                       B.  $\frac{51\pi}{2}$                       C.  $\frac{51}{2}$                       D. 39

**Câu 123.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 2$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình vuông cạnh  $f(x) = 2x$ . Tính thể tích của vật thể đó.

- A.  $\frac{8\pi}{3}$                       B.  $\frac{32\pi}{3}$                       C.  $\frac{32}{3}$                       D. 16

**Câu 124.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 2$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình tròn đường kính  $f(x) = \sqrt{4x + 2}$ . Tính thể tích của vật thể đó.

- A.  $6\pi$                       B.  $12\pi$                       C.  $3\pi$                       D. 3

**Câu 125.** Một chiếc phao cứu sinh có dạng khối tròn xoay sinh ra khi quay một hình tròn quanh một trục nằm trong mặt phẳng chứa hình tròn ấy và không cắt hình tròn (khối xuyên). Mặt cắt qua trục cho thấy bán kính ngoài của phao bằng 35 cm, bán kính trong bằng 25 cm. Phao làm bằng vật liệu đồng chất có khối lượng riêng 0,08 g/cm<sup>3</sup> (coi phao là khối đặc). Chọn hệ trục  $Oxy$  trong một mặt phẳng chứa trục của phao, trục  $Oy$  là trục của phao (đơn vị centimet). Thể tích  $V$  của phao (đơn vị cm<sup>3</sup>) bằng

- A.  $V = \pi \int_{-5}^5 \left[ (30 + \sqrt{25 - y^2})^2 - (30 - \sqrt{25 - y^2})^2 \right] dy$   
 B.  $V = \pi \int_{-5}^5 \left[ (30 + \sqrt{25 - y^2}) - (30 - \sqrt{25 - y^2}) \right]^2 dy$   
 C.  $V = \pi \int_0^5 \left[ (30 + \sqrt{25 - y^2})^2 - (30 - \sqrt{25 - y^2})^2 \right] dy$   
 D.  $V = \pi \int_{-5}^5 (30 + \sqrt{25 - y^2})^2 dy$

**Câu 126.** Một chiếc thùng làm kem có dạng khối tròn xoay mà mặt cắt qua trục là một parabol có đỉnh nằm ở đáy. Miệng thùng là hình tròn có đường kính 20 cm, chiều sâu của thùng (từ đáy đến mặt phẳng miệng) là 24 cm. Với  $0 \leq x \leq 24$ , gọi  $r(x)$  là bán kính của thiết diện vuông góc với trục, cách đáy  $x$  cm. Thùng chứa được tối đa bao nhiêu lít? (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 3, 77 lít                      B. 7, 54 lít                      C. 5, 03 lít                      D. 2, 51 lít

**Câu 127.** Cho hàm số  $f(x) = 3x^2$  và hình phẳng  $(D)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành, hai đường thẳng  $x = 0$  và  $x = 2$ .

- a) Khi quay  $(D)$  quanh trục  $Ox$ , thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x \in [0; 2]$  là hình tròn bán kính  $f(x)$ .  
 b) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục  $Ox$  được tính bởi công thức  $V = 2\pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$ .  
 c) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục  $Ox$  bằng  $\frac{288\pi}{5}$ .  
 d) Nếu thay  $f(x)$  bởi  $2f(x)$  thì thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục  $Ox$  tăng gấp 4 lần.

**Câu 128.** Một lều cắm trại có khung là hai thanh uốn theo hai parabol giống nhau, có chung đỉnh  $S$  và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau: parabol thứ nhất đi qua  $A, S, C$ , parabol thứ hai đi qua  $B, S, D$ , trong đó bốn chân lều  $A, B, C, D$  là bốn đỉnh của hình vuông cạnh  $2\sqrt{2}$  m trên mặt đất. Đỉnh  $S$  cao 1,5 m so với mặt đất, và mọi mặt cắt của lều bởi mặt phẳng song song với mặt đất đều là hình vuông có bốn đỉnh nằm trên hai parabol ấy. Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , chọn hệ trục  $Ixy$  (đơn vị mét) với  $I$  là tâm hình vuông  $ABCD$ , tia  $Ix$  đi qua  $C$ , tia  $Iy$  đi qua  $S$ .

a) Parabol đi qua  $A, S, C$  có phương trình  $y = 1,5 - 0,75x^2$ .

b) Mặt cắt của lều ở độ cao  $y$  mét ( $0 \leq y \leq 1,5$ ) có diện tích  $S(y) = 8\left(1 - \frac{2}{3}y\right)^2$  (m<sup>2</sup>).

c) Thể tích của lều là  $V = \int_0^{1,5} \left(8 - \frac{16}{3}y\right) dy$  (m<sup>3</sup>).

d) Thể tích của lều gấp đôi thể tích khối chóp tứ giác đều có cùng đáy  $ABCD$  và cùng chiều cao với lều.

**Câu 129.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 1$  và  $x = 4$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình vuông cạnh  $f(x) = \sqrt{x+3}$ . Tính thể tích  $V$  của vật thể đó.

   

**Câu 130.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 3$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình tròn đường kính  $f(x) = \sqrt{4x+3}$ . Thể tích của vật thể đó bằng  $V = k\pi$ . Tính  $k$ .

   

**Câu 131.** Một vật thể được **tiện tròn xoay** từ miền phẳng  $0 \leq y \leq f(x)$  trên  $[0; 29]$ , trong đó  $f$  là **đường gấp khúc** đi qua các điểm:

| Điểm gãy | $x$ (cm) | $f(x)$ (cm) |
|----------|----------|-------------|
| $M_0$    | 0        | 9           |
| $M_1$    | 9        | 18          |
| $M_2$    | 18       | 10          |
| $M_3$    | 29       | 9           |

Hồ sơ máy đã mất, chỉ còn danh mục các cấu hình có thể đã dùng. Mỗi cấu hình gồm một **trục quay** nằm ngang và một **lỗ khoan đồng trục** xuyên suốt:

| Cấu hình | Trục quay | Bán kính lỗ khoan $\rho$ (cm) |
|----------|-----------|-------------------------------|
| 1        | $y = 0$   | không khoan                   |
| 2        | $y = -1$  | không khoan                   |
| 3        | $y = 19$  | 4                             |
| 4        | $y = 7$   | 1                             |

Quy ước dựng thiết diện: quay đoạn thẳng đứng  $[0; f(x)]$  quanh trục  $y = h$  thì bán kính ngoài là  $R(x) = \max(|h|, |f(x) - h|)$  bán kính trong của **chính hình quay** bằng 0 nếu trục cắt qua đoạn ấy (tức  $0 \leq h \leq f(x)$ ), còn nếu không thì bằng  $\min(|h|, |f(x) - h|)$ . Sau khi khoan lỗ bán kính  $\rho$ , bán kính trong hữu hiệu là **giá trị lớn hơn** trong hai thứ ấy. Thiết diện là hình vành khăn diện tích  $\pi(R^2 - r_{hh}^2)$ . Để nhận dạng, người ta đo thể tích của **riêng đoạn**  $0 \leq x \leq 9$  cm và được kết quả nằm trong khoảng từ 9 L đến 9,14 L. Tính **thể tích toàn vật thể** của cấu hình duy nhất phù hợp, theo lít, làm tròn đến 0,1 L. (Đơn vị: 1 L = 1000 cm<sup>3</sup>.)

**Câu 132.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{4x+4}$ . Tính  $\int_1^4 [f(x)]^2 dx$ .

**Câu 133.** Một khối bê tông cao 2 m được đặt trên mặt đất. Cắt khối bê tông bởi mặt phẳng nằm ngang cách mặt đất  $x$  mét ( $0 \leq x \leq 2$ ) thì được thiết diện là hình chữ nhật có chiều dài 5 m và chiều rộng  $\left(\frac{2}{3}\right)^x$  m. Biết mỗi mét khối bê tông nặng 2,4 tấn. Khối bê tông nặng bao nhiêu tấn? (làm tròn đến hàng phần mười).

**Câu 134.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{4x+1}$ . Tính  $\int_1^3 [f(x)]^2 dx$ .

.....

.....

.....

**Câu 135.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 1$  và  $x = 2$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình vuông cạnh  $f(x) = 3x$ . Tính thể tích  $V$  của vật thể đó.

.....

.....

.....

**Câu 136.** Một vật thể được **tiện tròn xoay** từ miền phẳng  $0 \leq y \leq f(x)$  trên  $[0; 23]$ , trong đó  $f$  là **đường gấp khúc** đi qua các điểm:

| Điểm gãy | $x$ (cm) | $f(x)$ (cm) |
|----------|----------|-------------|
| $M_0$    | 0        | 16          |
| $M_1$    | 5        | 15          |
| $M_2$    | 12       | 14          |
| $M_3$    | 23       | 11          |

Hồ sơ máy đã mất, chỉ còn danh mục các cấu hình có thể đã dùng. Mỗi cấu hình gồm một **trục quay** nằm ngang và một **lỗ khoan đồng trục** xuyên suốt:

| Cấu hình | Trục quay | Bán kính lỗ khoan $\rho$ (cm) |
|----------|-----------|-------------------------------|
| 1        | $y = 0$   | không khoan                   |
| 2        | $y = -8$  | 2                             |
| 3        | $y = 18$  | 4                             |
| 4        | $y = 10$  | 1                             |

Quy ước dựng thiết diện: quay đoạn thẳng đứng  $[0; f(x)]$  quanh trục  $y = h$  thì bán kính ngoài là  $R(x) = \max(|h|, |f(x) - h|)$  bán kính trong của **chính hình quay** bằng 0 nếu trục cắt qua đoạn ấy (tức  $0 \leq h \leq f(x)$ ), còn nếu không thì bằng  $\min(|h|, |f(x) - h|)$ . Sau khi khoan lỗ bán kính  $\rho$ , bán kính trong hữu hiệu là **giá trị lớn hơn** trong hai thứ ấy. Thiết diện là hình vành khăn diện tích  $\pi(R^2 - r_{hh}^2)$ . Để nhận dạng, người ta đo thể tích của **riêng đoạn**  $0 \leq x \leq 12$  cm và được kết quả nằm trong khoảng từ 8,33 L đến 8,43 L. Tính **thể tích toàn vật thể** của cấu hình duy nhất phù hợp, theo lít, làm tròn đến 0,1 L. (Đổi đơn vị: 1 L = 1000 cm<sup>3</sup>.)

**Câu 137.** Từ một khối cầu bằng đá có bán kính 4 dm, người ta khoan bỏ phần lõi ở chính giữa: mũi khoan hình trụ có bán kính 2 dm khoan xuyên qua khối cầu theo một đường kính (trục của lỗ khoan đi qua tâm khối cầu). Chọn hệ trục  $Oxy$  có gốc  $O$  là tâm khối cầu, trục  $Ox$  là trục của lỗ khoan (đơn vị dm).

**Câu 138.** Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 1$  và  $x = 4$ . Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  là hình tròn đường kính  $f(x) = \sqrt{4x + 1}$ . Thể tích của vật thể đó bằng  $V = k\pi$ . Tính  $k$ .